

## Η επίδραση της συνάφειας στο μήκος πλαστικής άρθρωσης υποστηλωμάτων - αναλυτική επίλυση

**Κωνσταντίνος Μεγαλοικονόμου**

*Υπ. Διδάκτωρ, Πανεπιστήμιο Κύπρου, kmegal01@ucy.ac.cy*

**Σουσάνα Ταστάνη**

*Λέκτορας, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, stastani@civil.duth.gr*

**Σταυρούλα Πανταζοπούλου**

*Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Κύπρου / Πανεπιστήμιο Γκόρκ, Καναδά, pantaz@ucy.ac.cy*

### Περίληψη

Ως μήκος πλαστικής άρθρωσης σε υποστυλώμα οπλισμένου σκυροδέματος υπό σεισμική φόρτιση ορίζεται το διάστημα όπου οι καμπτικές ροπές υπερβαίνουν την αντοχή διαρροής. Αυτό το μήκος, μετρούμενο από την κρίσιμη διατομή προς το διατμητικό άνοιγμα, σηματοδοτεί την περιοχή όπου εμφανίζεται έντονη ανελαστικότητα κατά την διάρκεια ενός σεισμού. Καθορίζεται δε στους Κανονισμούς Σχεδιασμού μέσω εμπειρικών σχέσεων που λαμβάνουν υπόψη το μήκος του διατμητικού ανοίγματος και τη διάμετρο των κύριων ράβδων οπλισμού. Έτσι, συνυπολογίζουν με απλούστευση την επίδραση της διείδυσης διαρροής της ράβδου από την κρίσιμη διατομή προς το διατμητικό άνοιγμα και την στήριξη των υποστυλωμάτων. Ωστόσο, συνεπής ορισμός της έννοιας της πλαστικής άρθρωσης είναι σε σχέση με την πραγματική κατάσταση του οπλισμού, ως το μήκος στο οποίο οι παραμορφώσεις της ράβδου υπερβαίνουν την παραμόρφωση διαρροής. Η διείδυση της διαρροής όπου εμφανίζεται (στο διατμητικό άνοιγμα ή στην περιοχή αγκύρωσης) συνεπάγεται την εξάλειψη της συνάφειας ράβδου - σκυροδέματος με συνακόλουθη την απομείωση της ικανότητας για επιπλέον παραμόρφωση του οπλισμού. Για τον ορισμό του μήκους πλαστικής άρθρωσης ως συνέπεια της λειτουργίας του μηχανισμού συνάφειας ράβδου – σκυροδέματος στο διατμητικό άνοιγμα υποστυλώματος, επιλύεται η διαφορετική εξέλιξη της συνάφειας και διατυπώνονται οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος πριν και μετά την σταθεροποίηση της καμπτικής ρηγμάτωσης. Εξαγόμενα της λύσης αποτελούν οι κατανομές της παραμόρφωσης και ολίσθησης της ράβδου καθώς και η έκταση της διείδυσης της διαρροής από την κρίσιμη διατομή προς το διατμητικό άνοιγμα. Δεδομένης της καλής συσχέτισης με πειραματικά δεδομένα, η εργασία ολοκληρώνεται με την διερεύνηση της παραμετρικής ευαισθησίας του μήκους πλαστικής άρθρωσης συναρτήσει των κυρίων μεταβλητών συνάφειας για ένα τυπικό υποστυλώμα.

### Εισαγωγή

Μια μεγάλη συνιστώσα της ικανότητας παραμόρφωσης υποστυλωμάτων οπλισμένου σκυροδέματος αποτελεί η στροφή λόγω εξόλκευσης που εμφανίζεται στις κρίσιμες διατομές κοντά στις στηρίξεις ως αποτέλεσμα της διείδυσης των ανελαστικών παραμορφώσεων τόσο μέσα στην στήριξη (θεμέλιο) όσο και μέσα στο διατμητικό άνοιγμα. Στα υποστυλώματα που δεν αστοχούν από ρηγμάτωση του κορμού λόγω διαγώνιου εφελκυσμού, η διείδυση ανελαστικών παραμορφώσεων αυξάνει σταδιακά

με την επιβαλλόμενη μετατόπιση, διεκδικώντας σημαντικό μερίδιο της ικανότητας παραμόρφωσης κοντά στην οριακή κατάσταση αστοχίας. Για να αξιολογηθεί αυτή η συνιστώσα απόκρισης είναι απαραίτητο να διερευνηθούν οι συνθήκες συνάφειας κατά μήκος του εφελκόμενου οπλισμού, ο οποίος παραμορφώνεται πέραν της διαρροής και μέσα στο εύρος της κράτυνσης. Οι περιοχές εκδήλωσης των ανελαστικών παραμορφώσεων εντοπίζονται στο μήκος πλαστικής άρθρωσης του διατμητικού ανοίγματος καθώς και στο πρόσθιο τμήμα της αγκύρωσης, στα τμήματα δηλαδή εκατέρωθεν της κρίσιμης διατομής μεγιστοποίησης της ροπής. Λόγω της ανάπτυξης ανελαστικών παραμορφώσεων, ο οπλισμός υπόκειται σε επιμήκυνση η οποία συνήθως αποδίδεται ως μία καμπτική ρωγμή μεγάλου εύρους στη βάση του υποστυλώματος. Άλλες ενδείξεις επιμήκυνσης του οπλισμού είναι α) η κατακόρυφη μετατόπιση της βάσης η οποία αποδίδεται στην κορυφή του υποστυλώματος-προβόλου κατά την διάρκεια της πλευρικής ανακυκλιζόμενης φόρτισης καθώς και β) η επίσπευση της σύνθλιψης της επικάλυψης στην θλιβόμενη ζώνη λόγω τοπικής προσαύξησης της θλιπτικής παραμόρφωσης που οφείλεται στην στροφή στερεού σώματος από την εξόλκευση του εφελκόμενου οπλισμού (Syntzirma et. al. 2010).

Η διείδυση της ανελαστικής παραμόρφωσης συμβαίνει πέραν της κρίσιμης διατομής λόγω της εξασθένησης της αντοχής συνάφειας, η οποία σηματοδοτείται από την υπέρβαση του κρίσιμου μεγέθους ολίσθησης που ορίζει την έναρξη του φθιτού κλάδου στον νόμο συνάφειας-ολίσθησης. Αναλυτικά προσομοιώματα που περιγράφουν την κατάσταση της συνάφειας κατά μήκος της διεπιφάνειας ράβδου οπλισμού – σκυροδέματος σκοπό έχουν την κατανόηση και πρόβλεψη της συμπεριφοράς του δομικού σκυροδέματος με τρόπο συνεπή με τις βασικές αρχές. Προηγούμενες μελέτες (Bigaj 1999) έδειξαν ότι λεπτομερή προσομοιώματα συνάφειας μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη των τάσεων που προκύπτουν κατά την αποτίμηση της στροφικής ικανότητας στοιχείων οπλισμένου σκυροδέματος. Εξάλλου, η γνώση της κατανομής της παραμόρφωσης του οπλισμού όπως αυτή προκύπτει βάσει λειτουργίας συνάφειας είναι σημαντική ως προς τον εντοπισμό οριακών μεγεθών παραμόρφωσης στις κρίσιμες ζώνες. Έτσι καθίσταται ορθότερη η εκτίμηση του μήκους πλαστικής άρθρωσης σε καμπτοδιατμητικά στοιχεία. Επιπρόσθετα, η απόκριση του οπλισμού σε όρους τάσης και παραμόρφωσης καθώς και η μετατόπισή του σε σχέση με το περιβάλλον σκυρόδεμα μπορούν να περιγραφούν διεξοδικά μέσα από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης της συνάφειας στο διατμητικό άνοιγμα του στοιχείου. Με αυτό τον τρόπο γίνεται δυνατή η μελέτη φαινομένων εφελκυστικής δυσκαμνίας καθώς και η κατανόηση του πώς αυτά επηρεάζουν την συμπεριφορά του ρηγματωμένου σκυροδέματος.

Σε αυτό το άρθρο, υιοθετείται ένα μονοδιάστατο προσομοίωμα συνάφειας ως βάση για την εκτίμηση της διαμήκου κατανομής της παραμόρφωσης του κύριου οπλισμού του υποστυλώματος. Και ενώ έχουν προταθεί αρκετές λύσεις του προβλήματος της συνάφειας όταν η ράβδος συμπεριφέρεται ελαστικά (Yankelevsky 1985, Filippou et al. 1983), ωστόσο το ζήτημα της διείδυσης ανελαστικής παραμόρφωσης έχει ελάχιστα μελετηθεί σε αγκυρώσεις (Bonacci and Marquez. 1994, Tastani and Pantazopoulou 2013) και ματίσεις ράβδων σε περιοχές σταθερής ροπής (Tastani et. al. 2015). Το δε πρόβλημα της διείδυσης ανελαστικής παραμόρφωσης στο διατμητικό άνοιγμα υποστυλώματος συνυπολογίζοντας την συμπεριφορά του μηχανισμού συνάφειας των δύο υλικών, δεν έχει διευθετηθεί ακόμα.

### **Καταστατικές σχέσεις για την συνάφεια οπλισμού-σκυροδέματος**

Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν την μεταφορά δύναμης από την ράβδο στο περιβάλλον σκυρόδεμα μέσω της δράσης συνάφειας έχουν προκύψει από ισορροπία δυνάμεων που εφαρμόστηκε σε στοιχειώδες τμήμα ράβδου μήκους  $dx$  και από τη συμβατότητα μεταξύ μετατόπισης ράβδου

(ολίσθηση), αξονικής παραμόρφωσης  $\varepsilon$ , και παραμόρφωσης σκυροδέματος στο μήκος  $dx$ , συνεπώς (Tassios and Yannopoulos 1981, Filippou et. al. 1983):

$$df/dx = -(4/D_b)f_b \quad (1\alpha)$$

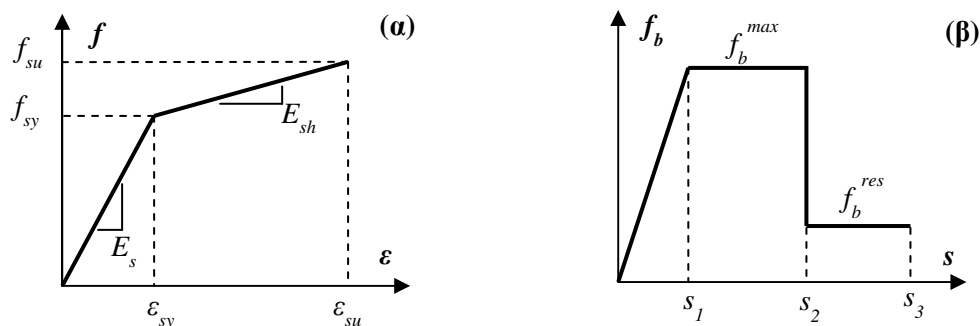
$$ds/dx = -(\varepsilon - \varepsilon_c) \cong -\varepsilon \quad (1\beta)$$

όπου  $f$  είναι η αξονική τάση ράβδου διαμέτρου  $D_b$ ,  $f_b$  είναι η τοπική τάση συνάφειας και  $s$  είναι η ολίσθηση της ράβδου ως προς το περιβάλλον σκυρόδεμα (σχετική ολίσθηση). Οι Εξ. (1α-β) συσχετίζονται μεταξύ τους μέσω του καταστατικού νόμου συνάφειας –ολίσθησης,  $f_b = f_b(s)$  και της σχέσης τάσης - παραμόρφωσης του υλικού της ράβδου  $f=f(\varepsilon)$ . Η συνεισφορά του σκυροδέματος στην σχετική ολίσθηση είναι  $\varepsilon_c dx$ , ωστόσο ο όρος αυτός συνήθως αγνοείται όταν η ανάλυση αφορά σύνητες σκυροδέμα διότι η μέση παραμόρφωση του σκυροδέματος είναι αμελητέα συγκρινόμενη με την παραμόρφωση που αναπτύσσει η ράβδος. Με επιλογή γραμμικών καταστατικών σχέσεων (τάσεων – παραμορφώσεων για τον χάλυβα και συνάφειας – ολίσθησης στην διεπιφάνεια χάλυβα – σκυροδέματος) η επίλυση των Εξ. (1) (διαφορική 2<sup>ου</sup> βαθμού) οδηγεί σε κλειστού τύπου συναρτήσεις τάσης και παραμόρφωσης κατά μήκος της αγκύρωσης.

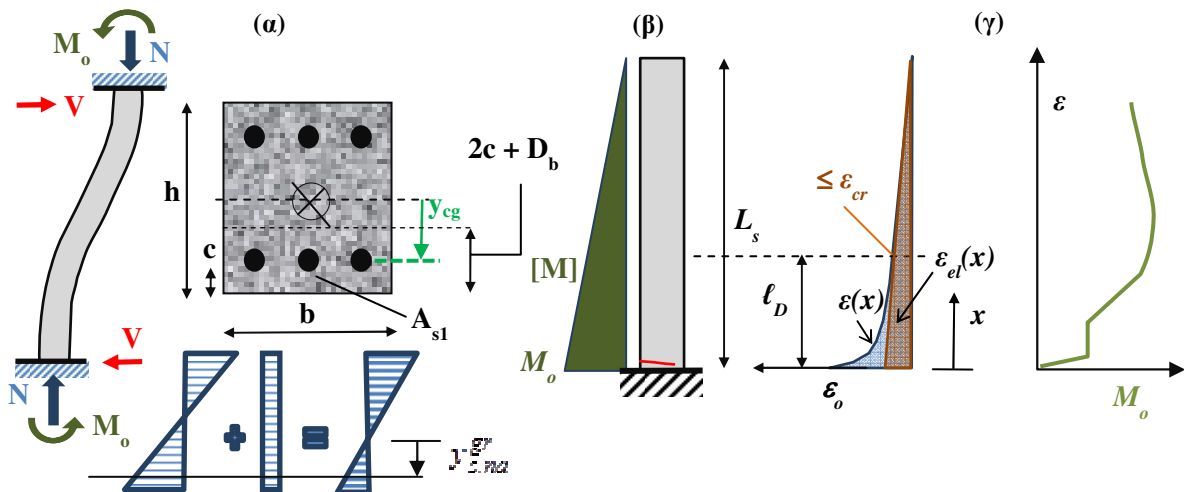
Ειδικότερα, η σχέση τάσης-παραμόρφωσης της ράβδου οπλισμού λαμβάνεται ελαστοπλαστική με κράτνση (Σχ. 1α) αντιπροσωπεύοντας την συμπεριφορά συμβατικού χαλύβδινου οπλισμού. Χωρίς να χυθεί η γενίκευση και για να διευκολυνθεί η εξαγωγή των κλειστού τύπου λύσεων, υιοθετήθηκε ελαστική - τέλεια πλαστική σχέση τοπικής συνάφειας – ολίσθησης με απομένουσα αντίσταση (Σχ. 1β). Ο τελευταίος κλάδος αντιπροσωπεύει την απομένουσα τριβή μεταξύ της επικάλυψης του σκυροδέματος και της χαλύβδινης ράβδου που έπεται της αστοχίας του μηχανισμού αλληλεμπλοκής των νευρώσεων. Το πλατώ στον νόμο τοπικής συνάφειας-ολίσθησης σηματοδοτεί την αντοχή σε συνάφεια. Το μέγεθος του πλατώ δεν είναι πάντα ευδιάκριτο στα πειραματικά αποτελέσματα. Για να μετρηθεί απαιτείται επαρκές μήκος αγκύρωσης ώστε να καταστεί δυνατή η ανακατανομή της δύναμης πριν την αστοχία. Το μέγεθος του μήκους αγκύρωσης καθορίζει την λήξη του πλατώ, την τιμή δηλαδή του  $s_2$ , ενώ αντίθετα, η τιμή  $s_1$  έχει βρεθεί να είναι χαρακτηριστικό της διεπιφάνειας και όχι του μήκους αγκύρωσης. Στον υιοθετούμενο νόμο η λήξη του πλατώ χαρακτηρίζεται από μια απότομη πτώση της αντοχής συνάφειας  $f_b^{max}$  σε μια απομένουσα τιμή  $f_b^{res}$  (η  $f_b^{res}$  λαμβάνεται μη μηδενική μόνο στην περίπτωση των χαλύβδινων ράβδων με νευρώσεις και όχι για λείες ράβδους).

### Προσομοίωμα εφελκυστικής δυσκαμψίας

Αναφέρθηκε προηγουμένως ότι η διείδυση των ανελαστικών παραμορφώσεων του οπλισμού συμβαίνει εκατέρωθεν της κρίσιμης διατομής στη βάση του υποστυλώματος. Η διαδικασία της ανελαστικής διείδυσης της παραμόρφωσης στην αγκύρωση μιας ράβδου οπλισμού έχει ήδη



Σχ. 1 Καταστατική σχέση α) τάσης-παραμόρφωσης για την χαλύβδινη ράβδο οπλισμού και β) τοπικής συνάφειας – ολίσθησης.



Σχ. 2 α) Ορισμός των παραμέτρων οριζόντιας σεισμικής φόρτισης του υποστυλώματος, β) κατανομή της ροπής κατά μήκος του διατμητικού ανοίγματος  $L_s$  και ορισμός της διαταραγμένης περιοχής  $\ell_D$ . γ) Σχέση ροπής – παραμόρφωσης στην κρίσιμη διατομή: κατά την μετάβαση από την αρηγμάτωτη στην ρηγματωμένη κατάσταση, ανεπαίσθητη αύξηση της ροπής προκαλεί άλμα στην παραμόρφωση.

παρουσιάζεται στην εργασία των Tastani and Pantazopoulou (2013). Αυτή η ενότητα είναι αφιερωμένη στο να λύσει το ίδιο πρόβλημα στην άλλη πλευρά της κρίσιμης διατομής, δηλαδή κατά μήκος του διατμητικού ανοίγματος του υποστυλώματος. Εδώ το πρόβλημα διαφέρει από εκείνο της αγκύρωσης μόνον ως προς τις συνοριακές συνθήκες που θα πρέπει να επιβληθούν, η δε διέπουσα διαφορική εξίσωση παραμένει ίδια. Όσον αφορά τον νόμο συνάφειας-ολίσθησης, ενώ η γενική μορφή της πολυγραμμικής περιβάλλουσας λαμβάνεται ίδια, το μέγεθος της αντοχής σε συνάφεια  $f_b^{max}$  εντός του διατμητικού ανοίγματος μπορεί να είναι μικρότερο ως προς αυτό της αγκύρωσης λόγω μειωμένης διαθέσιμης περίσφιξης.

Θεωρώντας υποστυλώμα οπλισμένου σκυροδέματος υπό οριζόντια σεισμική φόρτιση, η σχέση ροπής-τέμνουσας στο μήκος ενός υποστυλώματος-προβόλου είναι όμοια με αυτή που εμφανίζεται στο μήκος ενός πραγματικού μέλους πλαισίου που επεκτείνεται από το σημείο μηδενισμού της ροπής (και μηδενισμού της καμπυλότητας) στο μεσοδιάστημα του ύψους του μέλους μέχρι τη στήριξη (Σχ. 2α). Πριν λάβει χώρα οποιαδήποτε ρηγμάτωση κατά μήκος του καμπτόμενου στοιχείου, η παραμόρφωση της ράβδου μπορεί να εκτιμηθεί από την καμπτική ανάλυση της αρηγμάτωτης διατομής του υποστυλώματος (στο Σχ. 2β η καφέ κατανομή  $\varepsilon_{el}(x)$ ) σύμφωνα με την Εξ. (2) όπου  $M(x)$  είναι η ροπή σε απόσταση  $x$  από τη στήριξη,  $E_c$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του σκυροδέματος,  $I_g$  είναι η ροπή αδράνειας της αρηγμάτωτης διατομής με εμβαδόν  $A$ ,  $N$  είναι το αξονικό φορτίο,  $h$  είναι το ύψος της διατομής και  $c$  είναι η καθαρή επικάλυψη (Σχ. 2α).

$$\varepsilon_{el}(x) = (M(x) \cdot y_{cg} / (E_c \cdot I_g)) - N / (E_c \cdot A) \quad , \quad y_{cg} = (h/2) - c - 0.5D_b \quad (2a)$$

$$\text{ή γενικότερα, προ ρηγματώσεως:} \quad \varepsilon(x) = \varphi(x) \cdot y_{s,na}^{gr} \quad (2b)$$

όπου  $y_{c,g}$  η απόσταση από το κέντρο βάρους της σύνθετης διατομής μέχρι το κέντρο βάρους του εφελκόμενου οπλισμού (Σχ. 2α) και  $\varphi(x)$  η καμπυλότητα της διατομής σε απόσταση  $x$  από τη στήριξη. Ορίζεται επίσης η απόσταση της εφελκόμενης στρώσης του οπλισμού από τον ουδέτερο άξονα, η θέση του οποίου μεταβάλλεται σημαντικά από την αρχική ελαστική κατάσταση  $y_{s,na}^{gr}$  στην ρηγματωμένη κατάσταση της διατομής  $y_{s,na}^{cr}$ . Εάν η εφελκυστική ζώνη σκυροδέματος του μέλους είναι αρηγμάτωτη, η θέση του ουδέτερου άξονα μπορεί να εκτιμηθεί από τις απαιτήσεις ισορροπίας,

το ίδιο ισχύει και στις θέσεις όπου έχουν σχηματιστεί διακριτές ρωγμές εάν υποθεθεί η Αρχή Επιπεδότητας των διατομών (Bernoulli) ότι «οι επίπεδες διατομές κατά την επιβολή παραμόρφωσης παραμένουν επίπεδες ως προς τον παραμορφωμένο άξονα του μέλους».

Με βάση την κλασική θεωρία της κάμψης, ένα στοιχείο οπλισμένου σκυροδέματος μπορεί να θεωρηθεί ρηγματωμένο στις περιοχές όπου η καμπτική ροπή υπερβαίνει τη ροπή ρηγμάτωσης. Και ενώ μια μεγάλη περιοχή του διατμητικού ανοίγματος μπορεί να ικανοποιεί αυτή τη θεώρηση (δηλ.  $M > M_{cr}$ ), οι ρωγμές εμφανίζονται σε διακριτές θέσεις  $x_{icr}$ . Στις θέσεις αυτές, δεδομένης της σχέσης ροπής - παραμόρφωσης (ή καμπυλότητας) από ανάλυση της ρηγματωμένης διατομής, οι παραμορφώσεις του οπλισμού  $\varepsilon(x_{icr})$  μπορούν να εκτιμηθούν από την Εξ. (3).

$$\text{Κατόπιν ρηγματώσεως:} \quad \varepsilon(x_{icr}) = \varphi(x_{icr}) \cdot y_{s,na}^{cr} \quad (3)$$

Ωστόσο, στα διαστήματα μεταξύ των ρωγμών  $\ell_{cri}$ , όπου η ροπή μπορεί να υπερβαίνει την τιμή ρηγμάτωσης  $M_{cr}$ , οι πραγματικές παραμορφώσεις της ράβδου αποκλίνουν από τις εκτιμηθείσες βάσει καμπτικής ανάλυσης (π.χ. Εξ. (3)). Ο λόγος είναι ότι ο βαθμός συμβατότητας της παραμόρφωσης μεταξύ χάλυβα και σκυροδέματος σε αυτές τις θέσεις δεν είναι επαρκώς κατανοητός, όπως θα απαιτούσε η υπόθεση της επιπεδότητας των διατομών, ούτε το σκυρόδεμα μπορεί να θεωρηθεί αδρανές όπως θα συνέβαινε σε μια πλήρως ρηγματωμένη εφελκυστική ζώνη. Επειδή απαιτείται κάποια απόσταση από τη θέση της ρωγμής ωστόσο ο οπλισμός μπορεί να συμπλέξει την επικάλυψή του σε εφελκυσμό ώστε να ικανοποιήσει τις συνθήκες συμβατότητας της παραμόρφωσης, είναι ξεκάθαρο ότι η Εξ. (3) μπορεί να είναι αβάσιμη ακόμα και σε περιοχές κοντινές σε μια καμπτική ρωγή, ακόμα και αν αυτές βρίσκονται κάτω από το όριο ρηγμάτωσης.

Η παραμόρφωση της ράβδου - στα διαστήματα μεταξύ ρωγμών αλλά και πέραν της πιο απομακρυσμένης καμπτικής ρωγμής μέχρι το σημείο όπου επανέρχεται η ισχύ της πλήρους συμβατότητας των παραμορφώσεων των δύο υλικών όπου εξασφαλίζεται μηδενική ολίσθηση - μπορεί να εκτιμηθεί από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης της συνάφειας εισάγοντας έτσι την έννοια της εφελκυστικής δυσκαμψίας του οπλισμένου σκυροδέματος. Η περιοχή αυτή ορίζεται ως «διαταραγμένη», εντός της οποίας είναι δυνατόν να υπάρχουν διατομές όπου λόγω συνάφειας οι παραμορφώσεις του οπλισμού να είναι μικρότερες της τιμής ρηγμάτωσης του σκυροδέματος ( $\varepsilon_{cr}=0.00015$ ) και ωστόσο αν και αρηγμάτωτες λαμβάνονται εδώ ως διαταραγμένες. Σε αντιστοιχία με την καμπτική ανάλυση (Εξ. (2,3)), εισάγεται εδώ ο όρος «μη διαταραγμένες» αντί «αρηγμάτωτες» αναφορικά με τις διατομές που ικανοποιούν την υπόθεση της επιπεδότητας των διατομών, όπου οι παραμορφώσεις του σκυροδέματος και του οπλισμού στην ίδια απόσταση από τον ουδέτερο άξονα μπορούν να θεωρηθούν ίσες (και πάντως όχι μεγαλύτερες της τιμής ρηγμάτωσης  $\varepsilon_{cr}$ ).

Το μήκος του διατμητικού ανοίγματος αναφέρεται εφεξής ως  $L_s$ . Η καμπτική ροπή σε οποιαδήποτε διατομή σε απόσταση  $x$  από τη παρειά της στήριξης (Σχ. 2α) μπορεί να υπολογισθεί από ισορροπία με βάση την καμπτική ροπή που προκύπτει στη στήριξη,  $M_o$  σύμφωνα με την Εξ. (4) ( $\varepsilon_o$  είναι η αντίστοιχη παραμόρφωση της ράβδου οπλισμού στη στήριξη).

$$M(x) = M_o \cdot (1 - x/L_s) \quad (4)$$

Καθώς η ακολουθία του σχηματισμού ρωγμών καθορίζει α) το αυξανόμενο μήκος της διαταραγμένης περιοχής με αυξανόμενη παραμόρφωση  $\varepsilon_o$  (Σχ.2) καθώς και β) το πρόβλημα διεύθυνσης της ανελαστικής παραμόρφωσης, στην παρούσα ανάλυση το στατικό πρόβλημα που περιγράφει η Εξ. (4) θα λυθεί για βαθμιαία αυξανόμενη ροπή στη στήριξη. Σημείο εκκίνησης της ανάλυσης είναι η γνώση της καμπτικής συμπεριφοράς οποιασδήποτε διατομής κατά μήκος του διατμητικού ανοίγματος βάσει της κλασικής καμπτικής ανάλυσης (καμπύλες ροπής-καμπυλότητας και ροπής-παραμόρφωσης ράβδου).

Για ένα στοιχείο με ομοιόμορφα κατανεμημένο κύριο οπλισμό σε όλο το μήκος του, η κατανομή της ροπής (Εξ. (4)) θα προκαλέσει την πρώτη ρωγμή στην παρειά της στήριξης. Σύμφωνα με την προτεινόμενη θεώρηση, η παραμόρφωση της ράβδου στη βάση του υποστυλώματος – προβόλου μήκους  $L_s$ , εξαναγκάζεται σε απότομη αύξηση (άλμα) κατά τη ρηγμάτωση της εφελευόμενης ζώνης ώστε να διατηρηθεί η ισορροπία. Για παράδειγμα, εάν η δυσκαμψία της ρηγματωμένης διατομής είναι περίπου το 1/3 της αντίστοιχης αρηγματώτης, η παραμόρφωση της ράβδου στην κρίσιμη διατομή αναμένεται να τριπλασιαστεί μόνο από την εμφάνιση της ρωγμής παρόλο που η μεταβολή στη ροπή από την αρηγματώτη στην ρηγματωμένη κατάσταση μπορεί να είναι ανεπαίσθητη (Σχ. 2γ). Έτσι αιφνίδια, όλη η περιοχή κοντά στην θέση της πρώτης ρωγμής καθίσταται «διαταραγμένη». Εντός της διαταραγμένης περιοχής ( $\ell_D$  στο Σχ. 2β) η παραμόρφωση του οπλισμού περιγράφεται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης της ελαστικής συνάφειας (Tastani and Pantazopoulou 2013) και δίδεται από την Εξ. (5).

$$\varepsilon(x) = C_1 \cdot e^{-\omega x} + C_2 \cdot e^{\omega x}, \quad \omega = [4f_b^{max}/(E_s \cdot D_b \cdot s_1)]^{0.5} \quad (5)$$

Πριν από τη δημιουργία της δεύτερης ρωγμής, η διαταραγμένη περιοχή εκτείνεται σε μήκος  $\ell_D$  από την κρίσιμη διατομή (Σχ. 2β). Οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στην λήξη της διαταραγμένης περιοχής,  $x=\ell_D$ , (απαιτούνται για την εύρεση της σταθερών  $C_1, C_2$  της Εξ. (5)) όπου ο οπλισμός ξεκινά να έχει τέλεια συνάφεια με το σκυρόδεμα είναι:

α) η κλίση της κατανομής της παραμόρφωσης της ράβδου  $\psi = d\varepsilon(x)/dx$  όπου η  $\varepsilon(x)$  δίδεται από την Εξ. (5) συμπίπτει με την κλίση του διαγράμματος παραμόρφωσης βάσει της καμπτικής ελαστικής ανάλυσης (Εξ. (2) σε συνδυασμό με την Εξ. (4)):

$$\psi = d\varepsilon(x)/dx = \omega \cdot (-C_1 \cdot e^{-\omega \ell_D} + C_2 \cdot e^{\omega \ell_D}) = - \left[ \frac{(M_o \cdot y_{cg}) / (E_c I_{gr})}{\varepsilon_{el}^o} \right] \cdot 1/L_s \quad (6)$$

β) λόγω συνέχειας στην θέση  $x=\ell_D$  η παραμόρφωση  $\varepsilon(x)$  ικανοποιεί ταυτόχρονα τις Εξ. (2,5), ως:

$$\varepsilon(\ell_D) = C_1 \cdot e^{-\omega \ell_D} + C_2 \cdot e^{\omega \ell_D} = \varepsilon_{el}^o \cdot (1 - \ell_D/L_s) - N/(E_c \cdot A) \quad (7)$$

Από το σύστημα των Εξ. (6,7) το μήκος της διαταραγμένης περιοχής μπορεί να καθορισθεί δεδομένης της ροπής στη στήριξη  $M_o$ . Στην θέση αυτή είναι γνωστή και η παραμόρφωση του οπλισμού  $\varepsilon_o$  (από την καμπτική ανάλυση, διάγραμμα ροπών – παραμορφώσεων οπλισμού) οπότε η εφαρμογή της Εξ. (5) οδηγεί στην Εξ. (8).

$$\varepsilon(0) = C_1 + C_2 = \varepsilon_o \quad (8)$$

Στον αλγόριθμο όπως έχει διατυπωθεί μέχρι τώρα, για την αριθμητική επίλυση των Εξ. (6,7,8) παράμετρο ελέγχου αποτελεί η παραμόρφωση  $\varepsilon_o$ . Συνεπώς σε κάθε αυξητικό βήμα που ξεκινά με την επιλογή της τιμής του  $\varepsilon_o$ , η αντίστοιχη ροπή  $M_o$  καθορίζεται μοναδικά από το διάγραμμα ροπής – παραμόρφωσης ράβδου της διατομής του υπό μελέτη στοιχείου. Οι Εξ. (6,7,8) είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους: με δεδομένο το  $\varepsilon_o$  και το  $\omega$  οι άγνωστοι είναι  $C_1, C_2$  και  $\ell_D$ . Η συσχέτιση των Εξ. (6,7) καθορίζει τους  $C_1, C_2$  συναρτήσει των  $\ell_D$  και  $\varepsilon_{el}^o$  (σημ.  $\varepsilon_{el}^o = [M_o \cdot y_{cg} / (E_c I_g)]$ , βλ. Εξ. (6)).

$$C_1 = 0.5 \cdot e^{\omega \ell_D} \left[ \varepsilon_{el}^o \cdot \left( 1 - \frac{\ell_D}{L_s} + \frac{1}{\omega L_s} \right) - N/(E_c \cdot A) \right] \quad (9)$$

$$C_2 = 0.5 \cdot e^{-\omega \ell_D} \left[ \varepsilon_{el}^o \cdot \left( 1 - \frac{\ell_D}{L_s} - \frac{1}{\omega L_s} \right) - N/(E_c \cdot A) \right] \quad (10)$$

Με βάση τις Εξ. (9, 10), το  $\ell_D$  καθορίζεται από τη λύση της Εξ. (8) μετά από αντικατάσταση των  $C_1, C_2$ . Αυξανόμενου του μεγέθους  $\varepsilon_o$  μεταβάλλονται τα μεγέθη των  $C_1, C_2$  και  $\ell_D$  χωρίς απαραίτητα να σχηματίζεται νέα ρωγμή. Βασικό στάδιο του αλγορίθμου αποτελεί ο καθορισμός της θέσης της επόμενης ρωγμής διερευνώντας τα εξής δύο ενδεχόμενα:

α) Αν η εφελκυστική δύναμη που μεταφέρεται μέσω συνάφειας στην περιβάλλουσα επικάλυψη σκυροδέματος (δηλ.  $F_b = E_s A_{s1} [\varepsilon_o - \varepsilon(x)]$ ) υπερβεί την εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος (δηλ. την τιμή  $F_c = f_{ct} A_{c,eff}$ ) τότε η επόμενη ρωγμή σχηματίζεται εντός της διαταραγμένης ζώνης  $\ell_D$ . Για τον καθορισμό της συντεταγμένης  $x = \ell_{cr,1} < \ell_D$  αναζητείται τότε για πρώτη φορά εντός του  $\ell_D$  ισχύει η ανίσωση της Εξ. (11) οπότε και προκύπτει η τιμή του  $\ell_{cr,1}$ .

$$\left[ (E_s \cdot A_{s1}) / (f_{ct} \cdot A_{c,eff}) \right] \cdot [\varepsilon_o - \varepsilon(x)] \geq 1, \quad A_{c,eff} = b \cdot (2c + D_b) - A_{s1} \quad (11)$$

Στην Εξ. (11)  $A_{s1}$  είναι το εμβαδόν του εφελκυσμένου οπλισμού,  $A_{c,eff}$  είναι το εμβαδόν του σκυροδέματος που εμπλέκεται σε εφελκυσμό,  $f_{ct}$  η εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος και  $b$  είναι το πλάτος της διατομής του υποστυλώματος (Σχ. 2α).

β) Το ενδεχόμενο η επόμενη ρωγμή να εμφανιστεί στην αδιατάρακτη περιοχή καλύπτεται από την απαίτηση η ελαστική παραμόρφωση του οπλισμού (Εξ. (2)) να υπερβεί την παραμόρφωση ρηγματώσεως του σκυροδέματος στην στάθμη του οπλισμού. Η τιμή της συντεταγμένης  $x = \ell_{cr,1} \geq \ell_D$  προκύπτει με εφαρμογή των Εξ. (2,4) ως εξής:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{el}^o (1 - x/L_s) - N/(E_c \cdot A) = \varepsilon_{c,cr} \Rightarrow x = L_s \cdot [1 - \varepsilon_{c,cr}/\varepsilon_{el}^o - N/(E_c A \varepsilon_{el}^o)] \quad (12)$$

(Από διερεύνηση του αλγορίθμου φαίνεται ότι το κριτήριο α) υπερισχύει του β) γεγονός που υποδηλώνει ότι οι ρωγμές σχηματίζονται λόγω δράσης της συνάφειας εντός της διαταραγμένης ζώνης και όχι στην αδιατάρακτη περιοχή όπου οι παραμορφώσεις είναι ιδιαίτερος μικρές.)

Στην διαταραγμένη ζώνη  $\ell_D$  η εξίσωση της ολίσθησης προκύπτει από την ολοκλήρωση των παραμορφώσεων ως:

$$s(x) = \frac{1}{\omega} (C_1 \cdot e^{-\omega x} - C_2 \cdot e^{\omega x}) + C \quad (13)$$

όπου η σταθερά  $C$  προκύπτει από την απαίτηση ότι στην θέση  $x = \ell_D$  λόγω συμβατότητας παραμορφώσεων των δύο υλικών η τοπική ολίσθηση είναι μηδενική ( $s(\ell_D) = 0$ ).

Μετά τον καθορισμό της θέσης της δεύτερης ρωγμής από την στήριξη ( $\ell_{cr,1}$ ) ακολουθεί το επόμενο στάδιο επίλυσης, δηλαδή η εύρεση της νέας διαταραγμένης περιοχής  $\ell_D$  (καθώς και των νέων τιμών των σταθερών  $C_1, C_2$ ) η οποία αρχίζει από την θέση  $x = \ell_{cr,1}$  και εκτείνεται δεξιότερα μέχρι την ισχύ των συνοριακών συνθηκών ταύτισης κλίσεων και συνέχειας (Σχ. 3α). Ειδικότερα οι Εξ. (2,4) εφαρμόζονται για  $x = \ell_{cr,1} + \ell_D$  ενώ στην Εξ. (5) αντικαθίσταται όπου  $x$  η τιμή  $x - \ell_{cr,1}$  (η ισχύς της Εξ. 5 είναι για  $x \in [\ell_{cr,1}, \ell_{cr,1} + \ell_D]$ ). Η τιμή της παραμόρφωσης  $\varepsilon_{cr,2}$  στην θέση της δεύτερης ρωγμής (Σχ. 3α) προκύπτει βάσει καμπτικής ανάλυσης από την αντίστοιχη ροπή (βάσει της Εξ. 4 για  $x = \ell_{cr,1}$ ). Και ενώ κατά την αναζήτηση της νέας διαταραγμένης περιοχής η συνάφεια εξακολουθεί να συμπεριφέρεται ελαστικά εντός του  $\ell_D$  (σημείο ελέγχου αποτελεί η ολίσθηση στην θέση  $\ell_{cr,1}$  να μην υπερβαίνει το όριο  $s_1$ , στην Εξ. (13) όπου  $x$  λαμβάνεται  $x - \ell_{cr,1}$ ), η διερεύνηση της συνάφειας στο  $\ell_{cr,1}$  (αν δηλαδή βρίσκεται στον ανιόντα κλάδο, έχει πλαστικοποιηθεί ή βρίσκεται στον κλάδο απομένουσας αντοχής) έχει σημασία μόνον στον καθορισμό των δευτερευουσών ρωγμών (πύκνωση), που όμως δεν αποτελεί ζητούμενο της παρούσας εργασίας.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται αυξανόμενης της παραμόρφωσης  $\varepsilon_o$  έως ότου δεν

προκύπτουν νέες κύριες ρωγμές οπότε και σηματοδοτείται το στάδιο σταθεροποίησης της ρηγμάτωσης. Η σταθεροποίηση επέρχεται για τιμή παραμόρφωσης  $\varepsilon_o$  μικρότερη της διαρροής. Από το στάδιο αυτό και μέχρι την αστοχία του δομικού στοιχείου, για λόγους απλοποίησης του μαθηματικού προβλήματος, ορίζεται η λεγόμενη *ολική διαταραγμένη περιοχή*  $\ell_{Do}$  (Σχ. 3β) ως η απόσταση μεταξύ της στήριξης και δεξιότερα της τελευταίας κύριας ρωγμής (υπενθυμίζεται ότι από την θέση της τελευταίας ρωγμής και προς την αδιατάρακτη περιοχή απαιτείται κάποιο διάστημα  $\ell_{D,ncr}$  μέχρι την τέλεια συμβατότητα μεταξύ των υλικών, Σχ. 3β). Εντός του  $\ell_{Do}$  εξετάζεται η γενικευμένη συμπεριφορά της συνάφειας ενώ αγνοείται η παρουσία των διακριτών ρωγμών  $\ell_{cr,i}$ , η σημασία των οποίων όμως ελήφθη υπόψη στον ορισμό του  $\ell_{Do}$ , ως  $\ell_{Do} \geq \sum \ell_{cr,i}$ . Επισημαίνεται ότι *οι παραμορφώσεις της ράβδου εντός του  $\ell_{Do}$  υπολογίζονται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης της συνάφειας, αφού σε αυτή τη περιοχή δεν ισχύει πλέον η υπόθεση της επιπεδότητας των διατομών.*

Μετά τη σταθεροποίηση της ρηγμάτωσης (δεν αναπτύσσονται πλέον κύριες ρωγμές) και πέραν της ελαστικότητας της χαλύβδινης ράβδου, το τμήμα της διαταραγμένης περιοχής που διέρρευσε υφίσταται απομείωση της αντοχής της συνάφειας. Συνεπώς, από το συνολικό μήκος  $\ell_{Do}$ , υπάρχει ένα μήκος  $l_r$  στο οποίο η διαρροή έχει διεισδύσει (Σχ. 3β). Για αυτό το τμήμα της διαταραγμένης περιοχής οι παραμορφώσεις της ράβδου αυξάνονται χωρίς ανάλογη αύξηση της τάσης: αυτό σημαίνει ότι η συνάφεια απομειώθηκε στο μηδέν ως συνέπεια της Εξ. (1), αφού  $df_b/dx=0$  και άρα  $f_b=0$ . Ακόμα και αν το πλατώ της διαρροής του χάλυβα αγνοηθεί και το διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης της ράβδου οπλισμού θεωρηθεί διγραμμικό με κράτυνση ( $E_{sh}$ , Σχ. 1α), είναι προφανές ότι μια μικρή κλίση κράτυνσης μπορεί να υποστηριχθεί μόνο από την απομένουσα αντοχή σε συνάφεια. Με άλλα λόγια για να διαρρεύσει η ράβδος, θα πρέπει να ολισθήσει πέρα του ορίου  $s_2$  στο νόμο συνάφειας-ολίσθησης (Σχ. 1). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το όριο  $s_2$  δεν είναι φυσική ιδιότητα της διεπιφάνειας ράβδου-σκυροδέματος όπως την εκτιμούν διάφοροι Κανονισμοί αλλά εξαρτάται από το διαθέσιμο μήκος συνάφειας (Tastani and Pantazopoulou 2013).

Όμοια με τον καθορισμό της παραμόρφωσης, ολίσθησης και της τάσης συνάφειας μετά τη διαρροή για το μήκος διείσδυσης μιας ελαστοπλαστικής ράβδου στην αγκύρωση (Tastani and Pantazopoulou 2013), αναπτύσσονται εδώ οι παρακάτω σχέσεις για ράβδο που έχει διαρρεύσει στο διατμητικό άνοιγμα. Από τη στιγμή που έχει ληφθεί υπόψη κράτυνση στον καταστατικό νόμο του χάλυβα μια απομένουσα συνάφεια διασφαλίζεται από την εφαρμογή της Εξ. (1). Ξανά, η λύση της Εξ. (1) αποτελείται από το μήκος διείσδυσης της διαρροής  $l_r$ , το μήκος πλαστικοποίησης της συνάφειας  $l_p$  και το υπόλοιπο μήκος της ελαστικής συνάφειας:

Για  $0 \leq x \leq l_r$ :

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_o - \frac{4f_b^{res}}{E_{sh}D_b}x \quad (14)$$

$$s(x) = s_2 + 0.5(l_r - x)[\varepsilon(x) + \varepsilon_{sy}] \rightarrow x=0: s_o = s_2 + 0.5l_r(\varepsilon_o + \varepsilon_{sy}) \quad (15)$$

$$f_b(x) = f_b^{res} \quad (16)$$

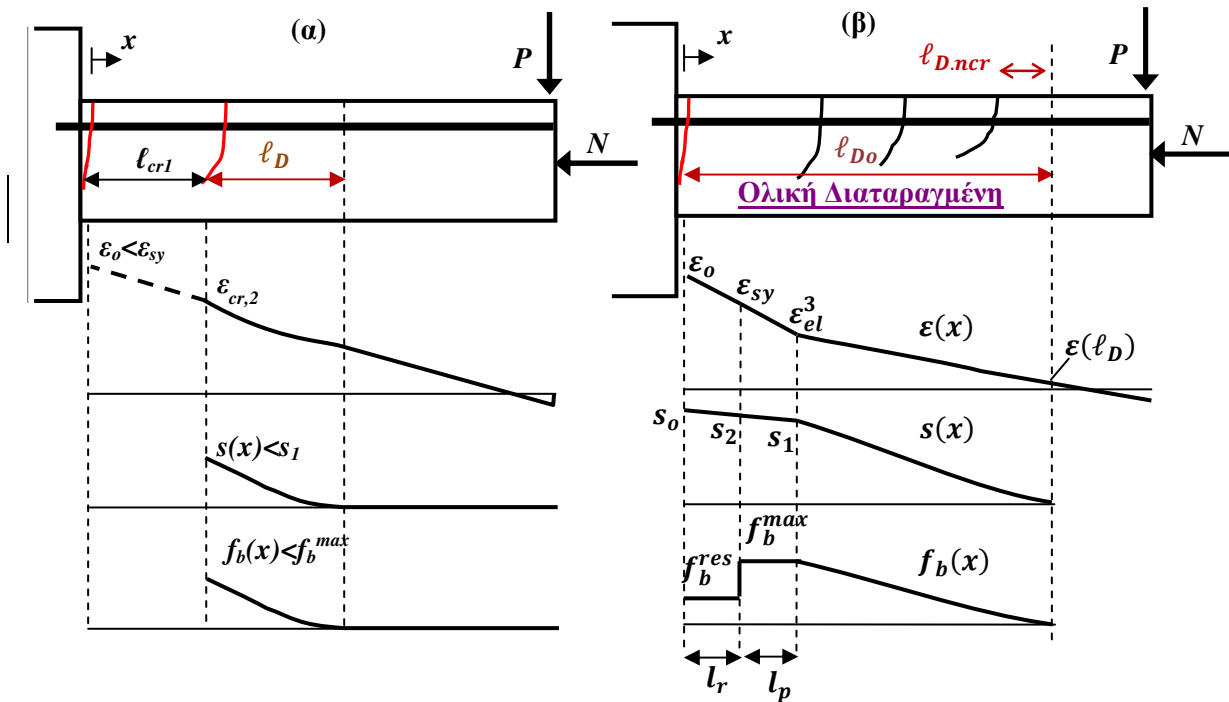
Για  $l_r \leq x \leq l_r + l_p$ :

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{sy} - \frac{4f_b^{max}}{E_s D_b}(x - l_r) \quad (17)$$

$$s(x) = s_1 + 0.5(l_r + l_p - x)[\varepsilon(x) + \varepsilon_{el}^3] \rightarrow x=l_r: s_2 = s_1 + 0.5l_p(\varepsilon_{sy} + \varepsilon_{el}^3) \quad (18)$$

$$f_b(x) = f_b^{max} \quad (19)$$





Σχ. 3. Ορισμός της διαταραγμένης περιοχής  $l_D$  α) πριν και β) μετά την σταθεροποίηση της ρηγμάτωσης. Στα δύο στάδια απεικονίζονται οι κατανομές παραμόρφωσης, ολίσθησης και τάσεων συνάφειας. Το μήκος πλαστικής άρθρωσης περιλαμβάνει το μήκος διεύθυνσης διαρροής  $l_r$  στο (β).

$$\varepsilon_{el}^3 = \varepsilon_{sy} - \frac{4f_b^{max}}{E_s D_b} l_p \quad (20)$$

Για  $l_r + l_p \leq x \leq l_D$ :

$$\varepsilon(x) = C_1 \cdot e^{-\omega(x-l_p-l_r)} + C_2 \cdot e^{\omega(x-l_p-l_r)} \quad (21)$$

$$s(x) = \frac{1}{\omega} \left( C_1 \cdot e^{-\omega(x-l_p-l_r)} - C_2 \cdot e^{\omega(x-l_p-l_r)} \right) + C \quad (22)$$

$$f_b(x) = \frac{f_b^{max}}{s_1} \cdot s(x) \quad (23)$$

Οι άγνωστοι  $l_D$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C$  προκύπτουν από τις συνοριακές συνθήκες στο  $x=l_D$  περί ταύτισης κλίσεων των κατανομών παραμόρφωσης (αριστερά λόγω συνάφειας και δεξιά λόγω ελαστικής απόκρισης του δομικού στοιχείου, Σχ. 3β), ταύτισης τιμών (συνέχεια) και συμβατότητας (μηδενική ολίσθηση). Δηλαδή, στην θέση  $x=l_r+l_p$  ισχύει ότι,  $s(x)=s_1$ , ενώ στην θέση  $x=l_D$  ισχύει ότι  $s(l_D)=0$ . Οι σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  προκύπτουν από την επίλυση των εξής εξισώσεων:

(α) Συνέχεια κλίσης παραμορφώσεων στη θέση  $x=l_D$ :

$$\omega \cdot \left( -C_1 \cdot e^{-\omega(l_D-l_r-l_p)} + C_2 \cdot e^{\omega(l_D-l_r-l_p)} \right) = - \left[ \frac{(M_0 \cdot y_{cg}) / E_c I_{gr}}{\varepsilon_{el}^0} \right] \cdot 1/L_s \quad (24)$$

β) Συνέχεια παραμόρφωσης στην θέση  $x=l_D$ :

$$\varepsilon(l_D) = C_1 \cdot e^{-\omega(l_D-l_r-l_p)} + C_2 \cdot e^{\omega(l_D-l_r-l_p)} = \varepsilon_{el}^0 \cdot (1 - l_D/L_s) - N/(E_c \cdot A) \quad (25)$$

(γ) Συνέχεια ολίσθησης στην θέση  $x=l_r+l_p$ :

$$s \cdot (l_r + l_p) = \frac{1}{\omega} (C_1 - C_2) + C = s_1 \quad (26)$$

(δ) Συνέχεια παραμόρφωσης στην θέση  $x=l_r+l_p$ :

$$\varepsilon(l_r + l_p) = C_1 + C_2 = \varepsilon_{el}^3 \quad (27)$$

Το μήκος διείδυσης της διαρροής  $l_r$  (Εξ. 28) μπορεί να εκτιμηθεί εάν επιβληθεί η συνέχεια της παραμόρφωσης για  $x = l_r$  (στην Εξ. (15)).

$$l_r = (\varepsilon_o - \varepsilon_{sy}) \cdot \frac{E_{sh} D_b}{4f_b^{es}} \quad (28)$$

Ο ανωτέρω αλγόριθμος καθορισμού των θέσεων των κύριων καμπτικών ρωγμών και εν συνεχεία στην ολική διαταραγμένη ζώνη του διατμητικού ανοίγματος των κατανομών παραμόρφωσης, ολίσθησης και τάσης συνάφειας καθώς και του ζητούμενου μήκους διείδυσης διαρροής εντός του διατμητικού ανοίγματος συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα υπολογισμού:

1<sup>ο</sup> βήμα: Καθορίζονται τα διαγράμματα ροπής-καμπυλότητας και ροπής-εφελκυστικής παραμόρφωσης ράβδου για τη διατομή του υπό μελέτη υποστυλώματος οπλισμένου σκυροδέματος. (όμοιες λεπτομέρειες όπλισης κατά μήκος του διατμητικού ανοίγματος).

2<sup>ο</sup> βήμα: Επιλέγεται η τιμή της παραμόρφωσης της ράβδου μετά το σχηματισμό της ρωγμής στη στήριξη,  $\varepsilon_o$ , (Εξ. 2,4).

3<sup>ο</sup> βήμα: Προσδιορίζεται η αντίστοιχη ροπή στη στήριξη  $M_o$  από το διάγραμμα ροπής-παραμόρφωσης ράβδου. Επιλύεται το μήκος της διαταραγμένης περιοχής της πρώτης ρωγμής.

4<sup>ο</sup> βήμα: Ελέγχεται εάν η επόμενη ρωγμή θα σχηματιστεί μέσα στη διαταραγμένη περιοχή, Εξ. (11).

5<sup>ο</sup> βήμα: Ελέγχεται εάν η επόμενη ρωγμή θα σχηματιστεί μέσα στην αδιατάρακτη περιοχή, Εξ. (12).

6<sup>ο</sup> βήμα: Υπολογίζονται οι κατανομές της παραμόρφωσης, της ολίσθησης και της τάσης συνάφειας της ράβδου για το τμήμα μεταξύ της ρωγμής της στήριξης και της επόμενης ρωγμής μέσα στο  $l_D$  (Σχ. 3α). Η ολική διαταραγμένη περιοχή ( $l_{D_o}$ ) ξεκινά από τη στήριξη και επεκτείνεται μέχρι το τέλος της διαταραγμένης περιοχής της τελευταίας ρωγμής. Ολόκληρη αυτή η ζώνη περιγράφεται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης της συνάφειας με βάση τις Εξ. (9,10,14-24). Εάν δεν εμφανιστεί πλαστικοποίηση της συνάφειας ή διαρροή της ράβδου η κατανομή περιγράφεται μόνο από το ελαστικό κομμάτι -Εξ. (9,10,21-23)- με μηδενικό  $l_r$  και  $l_p$ . Η κατανομή της ράβδου για το εναπομένον τμήμα ( $L_s-l_D$ ) όπου το υποστύλωμα παραμένει ελαστικό, αρηγμάτωτο και αδιατάραχτο περιγράφεται από τις Εξ. (2,4) (γραμμικές σχέσεις).

7<sup>ο</sup> βήμα: Επαναλαμβάνονται τα βήματα 2-6 μέχρι τη σταθεροποίηση της ρηγμάτωσης (καμία επιπλέον κύρια ρωγμή δεν θα σχηματιστεί από εκεί και πέρα).

8<sup>ο</sup> βήμα: Η παραμόρφωση της ράβδου στη στήριξη αυξάνεται σε διαδοχικά βήματα μέχρι την τιμή που αντιστοιχεί στη ροπή αστοχίας από το διάγραμμα ροπής-παραμόρφωσης ράβδου και καθορίζεται η κατανομή της παραμόρφωσης, της ολίσθησης και της τάσης συνάφειας της ράβδου για την  $l_{D_o}$ .

9<sup>ο</sup> βήμα: Το μήκος της πλαστικής άρθρωσης είναι το μήκος διείδυσης της διαρροής που χαρακτηρίζεται από την κατανομή της απομένουσας αντοχής συνάφειας μέσα στην ολική διαταραγμένη περιοχή ( $l_r$  στο Σχ. 3β).

### Μήκος πλαστικής άρθρωσης

Το μήκος πλαστικής άρθρωσης  $l_{pl}$  ορίζεται στη βιβλιογραφία ως το μήκος μέσα στο οποίο οι καμπτικές ροπές υπερβαίνουν την αντοχή διαρροής αντιπροσωπεύοντας έτσι το μήκος της ανελαστικής δραστηριότητας του οπλισμού κατά την διάρκεια ενός ισχυρού σεισμού:  $l_{pl} = (M_u -$

$M_y \cdot L_s / M_u + c$ , όπου  $M_u$  είναι η ροπή αστοχίας,  $M_y$  η ροπή διαρροής και  $c$  διορθωτικός συντελεστής που λαμβάνει υπόψη την εξόλκευση του οπλισμού από την περιοχή στήριξης (κόμβος ή θεμέλιο). Η γνώση του  $\ell_{pl}$  (προσεγγιστικά λαμβάνεται και ως  $0.5d$  όπου  $d$  το στατικό ύψος της κρίσιμης διατομής) είναι απαραίτητη στην εκτίμηση της ικανότητας πλαστικής στροφής λόγω κάμψης (σύμφωνα με Eurocode 8 (2005):  $\theta_{pl} = (\varphi_u - \varphi_y) \cdot \ell_{pl}$ , όπου  $\theta_{pl}$  είναι η πλαστική στρόφη και  $\varphi_y, \varphi_u$  είναι η καμπυλότητα διαρροής και αστοχίας αντίστοιχα). Στους κανονισμούς σχεδιασμού το  $\ell_{pl}$  καθορίζεται βάσει βαθμονομημένων εμπειρικών σχέσεων που λαμβάνουν υπόψη κυρίως το μήκος του διατμητικού ανοίγματος (δηλ. την καμπτική απόκριση) και τη διάμετρο των ράβδων του κύριου οπλισμού (δηλ. την εξόλκευση του αγκυρωμένου οπλισμού). (Εξ. (29) κατά Priestley et. al. (1996), Εξ. (30) κατά Eurocode 8 (2005) όπου  $h =$  το ύψος της διατομής του στοιχείου.)

$$\ell_{pl} = 0.08 \cdot L_s + 0.022 \cdot D_b \cdot f_y \quad (29)$$

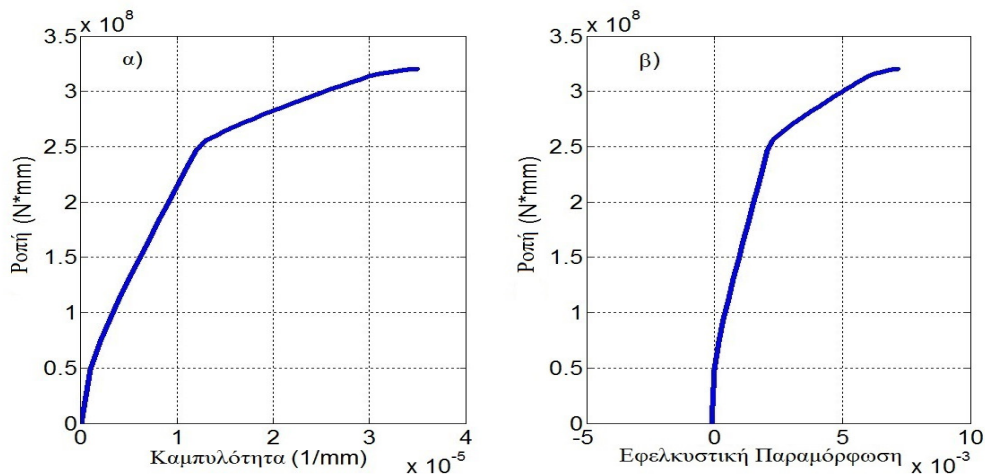
$$\ell_{pl} = 0.1 \cdot L_s + 0.17 \cdot h + 0.24 \cdot D_b \cdot f_y / \sqrt{f_c} \quad (30)$$

Στην προκείμενη εργασία, το μήκος της πλαστικής άρθρωσης είναι εξ ορισμού το μήκος της διείδυσης της διαρροής (άρα  $\ell_{pl} = l_r$ ), μετρούμενο από τη κρίσιμη διατομή εντός του διατμητικού ανοίγματος και εντός της αγκύρωσης. Στην ουσία αναφέρεται στην έκταση της μη γραμμικής περιοχής και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό της ικανότητας ανελαστικής στροφής του υποστυλώματος. Αντίθετα με τις σταθερές τιμές σχεδιασμού που υιοθετούνται από τους κανονισμούς αποτίμησης, ο προτεινόμενος είναι ουσιαστικά ο απολύτως συνεπής ορισμός της έννοιας του μήκους της πλαστικής άρθρωσης.

## Επαλήθευση

Στην παρούσα ενότητα γίνεται εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου σε πειραματικά δεδομένα από την διεθνή βιβλιογραφία. Παρουσιάζονται οι κατανομές της παραμόρφωσης, της ολίσθησης και της τάσης συνάφειας στο διατμητικό άνοιγμα και στην αγκύρωση ενός υποστυλώματος-προβόλου κατά τα στάδια πριν και μετά την σταθεροποίηση της ρηγμάτωσης. Στην αντοχή του δομικού στοιχείου καθορίζεται το μέγιστο μήκος διείδυσης διαρροής εκατέρωθεν της κρίσιμης διατομής και άρα το πραγματικό μήκος πλαστικής άρθρωσης. Το αποτέλεσμα συγκρίνεται με το αντίστοιχο των εμπειρικών σχέσεων (Εξ. (29, 30)). Σημειώνεται ότι οι κατανομές στην αγκύρωση καθορίζονται σύμφωνα με τους Tastani and Pantazopoulou (2013).

Το υπό θεώρηση τετραγωνικό υποστύλωμα (U3, Saatcioglu and Ozcebe, 1989) έχει πλάτος 350 mm με οχτώ ράβδους διαμήκους οπλισμού διαμέτρου  $D_b = 25$  mm και συνδετήρες διαμέτρου  $D_{b,st} = 10$  mm με βήμα 75 mm ως εγκάρσιος οπλισμός. Η θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος είναι 34.8 MPa και η αντοχή διαρροής του διαμήκους οπλισμού είναι 430 MPa με 5% κράτυνση. Η αντοχή διαρροής των συνδετήρων είναι 470 MPa. Η καθαρή διάσταση της επικάλυψης είναι 45 mm. Το διατμητικό άνοιγμα είναι  $L_s = 1000$  mm. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ροπής-καμπυλότητας δίδονται στο Σχ. 4. Για την ανάλυση ροπής-καμπυλότητας χρησιμοποιήθηκε η διακριτοποίηση της διατομής σε «ίνες». Τα καταστατικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν είναι των Kent and Park (Scott et. al. 1982) για το σκυρόδεμα και ένας διγραμμικός νόμος τάσης-παραμόρφωσης με κράτυνση (5%) για τον διαμήκη χαλύβδινο οπλισμό (Σχ. 1α). Για το θεμέλιο, η αντοχή σε συνάφεια καθορίστηκε σύμφωνα με τον *fib Model Code 2010* ως  $f_{b,max} = 1.25 \sqrt{f_{ck}}$  (7.37 MPa) όπου  $f_{ck}$  η χαρακτηριστική αντοχή σκυροδέματος. Αντίθετα, για το διατμητικό άνοιγμα εφαρμόστηκε η παρακάτω σχέση για να ληφθεί υπόψη η συνεισφορά των συνδετήρων στην αντοχή σε συνάφεια:



Σχ. 4 α) Διαγράμματα ροπής - καμπυλότητας και β) ροπής - εφελκυστικής παραμόρφωσης ράβδου οπλισμού για το υπό μελέτη υποστήλωμα.

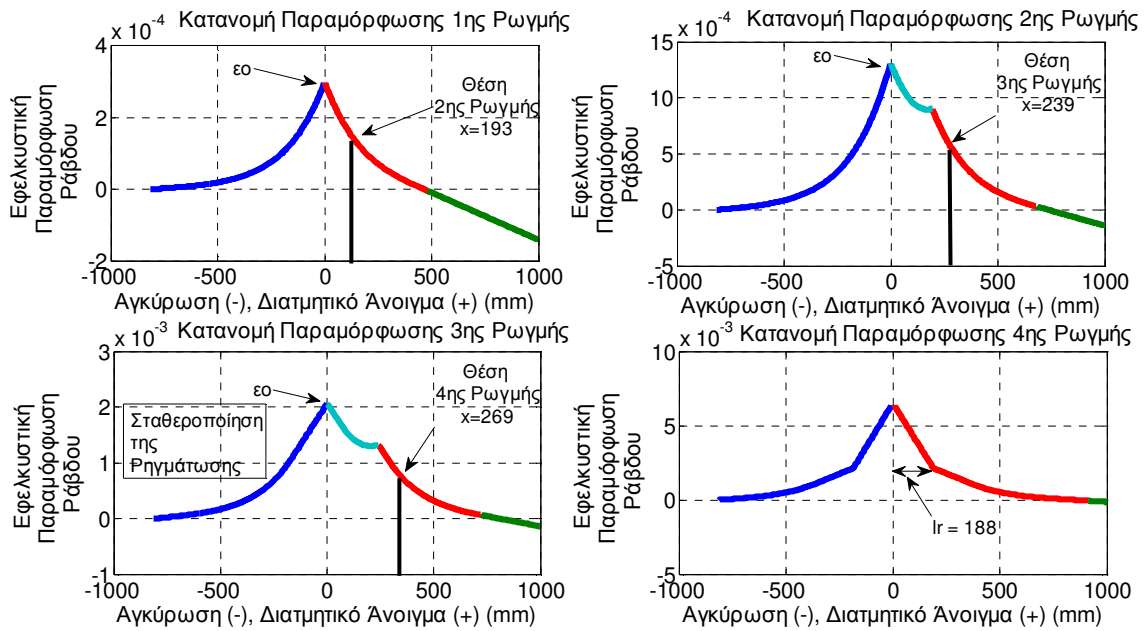
$$f_{b,max} = \frac{2\mu_{fr}}{\pi D_b} \left( 2c \cdot f_{ctk} + 0.33 \cdot \frac{A_{st} f_{yw}}{N_b s} \right) \quad (31)$$

όπου  $N_b$  ο αριθμός των εφελκόμενων ράβδων (ή των ζευγών των ματισμένων εφελκόμενων ράβδων στις περιπτώσεις μάτισης) οι οποίες περιορίζονται πλευρικά λόγω της παρεχόμενης από τους συνδετήρες περίσφιγξης,  $c$  η καθαρή επικάλυψη του σκυροδέματος,  $A_{st}$  το εμβαδόν των σκελών των συνδετήρων που περικλείουν τον  $N_b$  αριθμό ράβδων (το εμβαδόν των σκελών των συνδετήρων που διασχίζουν την ρωγμή),  $s$  είναι το βήμα διάταξης των συνδετήρων,  $\mu_{fr}$  είναι ο συντελεστής τριβής,  $f_{ctk}$  είναι η χαρακτηριστική εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος και  $f_{yw}$  είναι η αντοχή διαρροής των συνδετήρων. Ο πρώτος όρος στην Εξ. 31 ( $2c \cdot f_{ctk}$ ) αναφέρεται στην συμμετοχή, στην αντοχή του μηχανισμού συνάφειας, που υποστηρίζει η καθαρή επικάλυψη του οπλισμού – αυτή η ποσότητα σε μεγάλα επίπεδα έντασης εξαντλείται και ως εκ τούτου αγνοείται (κυρίως μετά το στάδιο της σταθεροποίησης της ρηγμάτωσης) επειδή ουσιαστικά επέρχεται αποφλοιώση της επικάλυψης με την ανακυκλιζόμενη ένταση, και άρα η μόνη πηγή συνάφειας σε αυτό το στάδιο παρέχεται από την περίσφιγξη των ράβδων μέσω των εγκάρσιων οπλισμών. Συνεπώς η μέγιστη αντοχή συνάφειας στο διατμητικό άνοιγμα για το υπό μελέτη υποστήλωμα είναι 7.22 ΜΡα ή 2.75 ΜΡα χωρίς την συμβολή της επικάλυψης στην αντοχή συνάφειας (Στην Εξ. (31):  $\mu_{fr}=1$ ,  $f_{ctk} = 0.33\sqrt{f_{ck}}$ ,  $N_b = 3$ ). Η απομένουσα αντοχή σε συνάφεια  $f_b^{res}$  ορίστηκε σε 20% της αντοχής και  $s_l = 0.2$  mm.

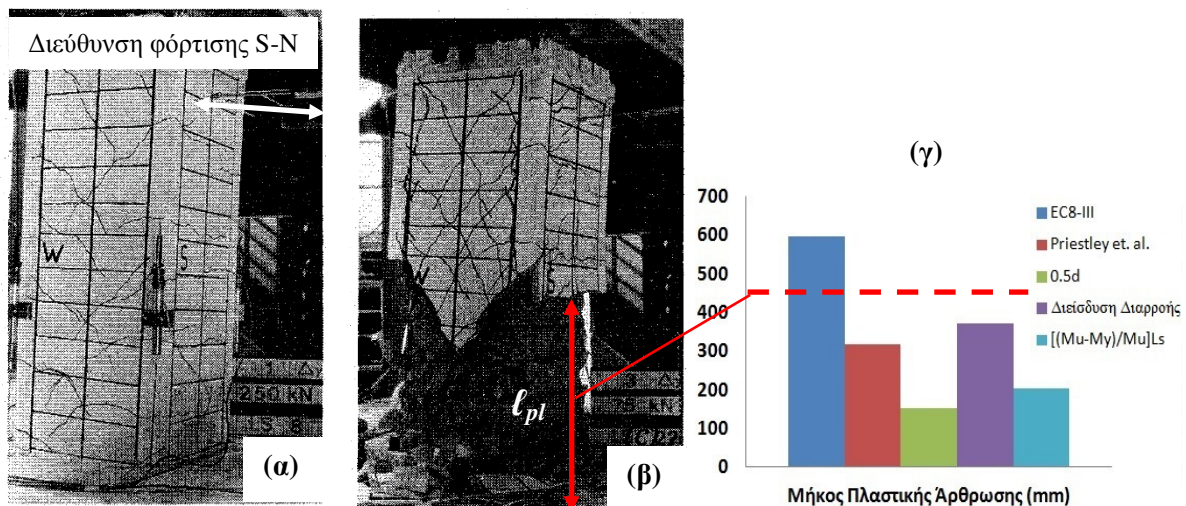
Η ακολουθία ρηγμάτωσης όπως περιγράφηκε προηγουμένως και τα αποτελέσματα σε όρους κατανομής παραμόρφωσης για το υπό μελέτη υποστήλωμα παρουσιάζονται στο Σχ. 5. Έως την επίτευξη της σταθεροποίησης της ρηγμάτωσης, σχηματίστηκαν ρωγμές σε αποστάσεις 193, 223 και 269mm από την κρίσιμη διατομή (η τελευταία σε παραμόρφωση  $\epsilon_o \approx 2\text{‰}$ , με  $\epsilon_{sy} = 2.15\text{‰}$ ). Εν μέρει, η εκτιμώμενη ρηγματωμένη κατάσταση προσεγγίζει την πραγματική, όπως φαίνεται στο Σχ. 6, ενώ η όποια απόκλιση μπορεί να περιοριστεί αν η παράμετρος  $f_b^{max}$  τροποποιηθεί σε συντηρητικότερη τιμή.

Όπως φαίνεται από το Σχ. 5 (κάτω δεξιά διάγραμμα) το μήκος της διείδυσης της διαρροής εντός του διατμητικού ανοίγματος εκτιμήθηκε σε 188 mm ( $0.62d$  ή  $0.19L_s$ ) ενώ στο θεμέλιο 184 mm (ή  $0.017D_b f_s$ ). Το συνολικό μήκος διείδυσης διαρροής που τελικώς ορίζει το μήκος της πλαστικής άρθρωσης (όπως δηλώνουν οι Εξ. (29, 30)) είναι το άθροισμα των δύο τιμών ως 372 mm. Στο Σχ.6γ συγκρίνεται το αναλυτικό μήκος βάσει την προτεινόμενης θεώρησης με τις τιμές που προκύπτουν από την εφαρμογή των Εξ. (29, 30), της εμπειρικής τιμής ως το μισό του στατικού ύψους της διατομής του υποστηλώματος καθώς και με τον κλασικό ορισμό (το μήκος όπου η ροπή υπερβαίνει τη ροπή

διαρροής). Δεδομένης της αναφερθείσας βλάβης του δοκιμίου σε φόρτιση  $3A_y$  (ή  $3\varepsilon_{sy}$ ) όπως απεικονίζεται στο Σχ. 6β, το μήκος πλαστικής άρθρωσης εκτιμάται σε περίπου 450mm, μέγεθος που βρίσκεται μεταξύ της υπολογισθείσας βάσει της θεώρησης συνάφειας και της τιμής που δίνει η σχέση που προτείνεται στον EC8-III (Eurocode 8, 2005). Οι άλλες εμπειρικές σχέσεις για τον υπολογισμό του μήκους της πλαστικής άρθρωσης δίνουν χαμηλότερες τιμές σε σχέση με την προτεινόμενη υπολογιστική διαδικασία.



Σχ. 5. Κατανομές παραμόρφωσης ράβδου στην αγκύρωση (μπλε καμπύλες) και στο διατμητικό άνοιγμα (γαλάζιες, κόκκινες, πράσινες καμπύλες) όπου φαίνεται η θέση των ρωγμών (2<sup>η</sup> - 4<sup>η</sup>). Το κάτω δεξιά διάγραμμα αφορά την απόκριση του οπλισμού στην αντοχή του υποστηλώματος.



Σχ. 6. α) Η ρηγματώση του δοκιμίου U3 στην διαρροή, β) η ζώνη  $l_{pl}$  με την εκτενή βλάβη σε παραμόρφωση  $3\varepsilon_{sy} \approx 6.5\%$  (φόρτιση στην διεύθυνση S-N, Saatcioglu and Ozcebe, 1989) και γ) συσχέτιση των εκτιμώμενων μεγεθών  $l_{pl}$ .

## Παραμετρική ανάλυση

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται η διερεύνηση της παραμετρικής ευαισθησίας του μήκους πλαστικής άρθρωσης συναρτήσει των κυρίων μεταβλητών συνάφειας για το υπό μελέτη υποστυλώμα της προηγούμενης ενότητας. Στον Πιν.1 ορίζονται οι παράμετροι που εξετάστηκαν διατηρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές του αλγόριθμου σταθερές.

Όπως φαίνεται, το μέτρο κράτνσης  $E_{sh}$  αυξάνει το μήκος της πλαστικής άρθρωσης σύμφωνα με την Εξ. (28). Αύξηση του μέτρου κράτνσης καθώς και μείωση της απομένουσας συνάφειας οδηγούν σε αύξηση του μήκους πλαστικής άρθρωσης (Πιν.1). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στο μήκος πλαστικής άρθρωσης συνυπολογίστηκε και το μήκος διείδυσης της διαρροής στην αγκύρωση.

Οι θέσεις των ρωγμών επηρεάζονται από την ποσότητα  $\omega$  που καθορίζει την ελαστική συνάφεια σύμφωνα με την Εξ. (5). Μείωση του ορίου ολίσθησης  $s_I$  οδηγεί σε πύκνωση των ρωγμών πιο κοντά στην κρίσιμη διατομή της βάσης του υποστυλώματος όπως είναι ευδιάκριτο στον Πιν.1. Σε όλες τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται στον Πίν. 1 η πρώτη ρωγή εμφανίζεται πάντα στη βάση του υποστυλώματος ( $x_{Icr}=0$ ).

Συμπερασματικά, το μέτρο κράτνσης  $E_{sh}$  επηρεάζει την απόκριση του υποστυλώματος μετά την σταθεροποίηση της ρηγμάτωσης ενώ αντίθετα τόσο η αντοχή σε συνάφεια  $f_b^{max}$  όσο και το όριο ολίσθησης  $s_I$  καθορίζουν την ακολουθία σχηματισμού των ρωγμών του υποστυλώματος πριν από τη σταθεροποίηση της ρηγμάτωσης. Τέλος, σχετικά με την απομένουσα συνάφεια  $f_b^{res}$ , αυτή επηρεάζει σημαντικά το μήκος της πλαστικής άρθρωσης αφού όπως φαίνεται στην τελευταία στήλη του Πιν. 1 σε σχέση με τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας το μήκος πλαστικής άρθρωσης διπλασιάζεται με μείωση της απομένουσας συνάφειας στο μισό.

Πιν. 1. Παραμετρική διερεύνηση

Παράμετροι	$E_{sh}=1\%$		$E_{sh}=5\%$		$E_{sh}=5\%$
	$s_I=0.1\text{ mm}$	$s_I=0.15\text{ mm}$	$s_I=0.1\text{ mm}$	$s_I=0.15\text{ mm}$	$s_I=0.2\text{ mm}$
	$f_b^{res} = 0.1f_b^{max}$		$f_b^{res} = 0.1f_b^{max}$		$f_b^{res} = 0.1f_b^{max}$
<b>Θέσεις ρωγμών (mm)</b>	$X2cr=109$ $X3cr=136$ $X4cr=155$	$X2cr=129$ $X3cr=163$ $X4cr=187$	$X2cr=109$ $X3cr=136$ $X4cr=155$	$X2cr=129$ $X3cr=163$ $X4cr=187$	$X2cr=193$ $X3cr=239$ $X4cr=269$
<b>Μήκος πλαστικής άρθρωσης (mm)</b>	149	149	738	738	744

## Συμπεράσματα

Η διείδυση της διαρροής εμφανίζεται από την κρίσιμη διατομή προς τόσο το διατμητικό άνοιγμα όσο και τη στήριξη των υποστυλωμάτων, αναφερόμενη ουσιαστικά στην έκταση της μη γραμμικής συμπεριφοράς του οπλισμού περιοχής, και καθορίζει την ολίσθηση εξόλκευσης που μετριέται από την κρίσιμη διατομή. Σε αντίθεση με τις σταθερές τιμές σχεδιασμού που υιοθετούνται από τους κανονισμούς, ο παραπάνω ορισμός της έννοιας του μήκους της πλαστικής άρθρωσης είναι συνεπής με την μηχανική του προβλήματος αφού καθορίζει και την συνεισφορά της στροφής εξόλκευσης στη συνολική στροφή και στην δυσκαμψία του υποστυλώματος. Για τον προσδιορισμό του μήκους της πλαστικής άρθρωσης με τρόπο σύμφωνο με τον παραπάνω ορισμό, στο άρθρο αυτό καθορίστηκε σαφώς η λύση της διαφορικής εξίσωσης της συνάφειας κατα μήκος του διατμητικού ανοίγματος του υποστυλώματος. Μέσα από αυτή την προσέγγιση, οι κατανομές των παραμορφώσεων των ράβδων του διαμήκους οπλισμού και η έκταση της διείδυσης διαρροής από την κρίσιμη διατομή που έχει

διαρρεύσει προς το διατμητικό άνοιγμα επιλύθηκαν και υπολογίστηκαν αναλυτικά. Η εφαρμογή της μεθοδολογίας δίνεται σε παράδειγμα υποστυλώματος υπό ανακυκλιζόμενη ένταση με έμφαση στις συνθήκες που οδήγησαν την αστοχία του.

### Ευχαριστίες

Ο πρώτος συγγραφέας θα ήθελε να ευχαριστήσει το Κοινοφελές Ίδρυμα Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης για την οικονομική υποστήριξη για την διεξαγωγή της έρευνας της παρούσας εργασίας στα πλαίσια της εκπόνησης της διδακτορικής του διατριβής στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

### Βιβλιογραφία

- Syntzirma D. V., Pantazopoulou S. J. and Aschheim M. (2010), “Load history effects on deformation capacity of flexural members limited by bar buckling”, *ASCE J. of Structural Eng.*, Vol. 136, No. 1, pp. 1–11.
- Bigaj A.J. (1999), “Structural Dependence of Rotation Capacity of Plastic Hinges in RC Beams and Slabs”, PhD Thesis, Faculty of Civil Engrg., Delft Univ. of Technology, Delft, the Netherlands.
- Bonacci, J., Marquez, J. (1994), “Tests of Yielding Anchorages under Monotonic Loadings”, *ASCE J. of Structural Eng.*, Vol. 120, No. 3, pp. 987-997.
- Tastani, S. P., Pantazopoulou, S. J. (2013), “Reinforcement and concrete bond: State determination along the development length”, *ASCE J. of Structural Eng.*, Vol. 139, No. 9, pp. 1567–1581.
- Tastani, S. P., Brokalaki E., Pantazopoulou, S. J. (2015), “State of Bond along Lap Splices”, *ASCE J. of Structural Eng.*, Vol. 141, No. 10, DOI 04015007.
- Filippou, F., Popov, E., and Bertero, V. (1983), “Modeling of R/C joints under cyclic excitations”, *ASCE J. of Structural Eng.*, Vol. 109, No. 11, pp. 2666–2684.
- Yankelevsky, D. (1985), “New Finite Element for Bond-Slip Analysis”, *ASCE J. of Structural Eng.*, Vol. 111, No. 7, pp. 1533-1542.
- Tassios, T. P., Yannopoulos, P. J. (1981), “Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond-slip relationships”, *ACI Materials Journal*, Vol. 78, No. 3, pp. 206-216.
- Tastani S.P., Pantazopoulou S.J. (2013), “Yield penetration in seismically loaded anchorages: effects on member deformation capacity”, *Techno press Earthquake and Structures*, Vol. 5, No. 5, pp. 527-552.
- Eurocode 8, (2005). Design of structures for earthquake resistance – Part 3: Assessment and retrofitting of buildings, European Committee for Standardisation.
- Priestley, M.J.N., Seible F., and Calvi M. (1996). Seismic Design and Retrofit of Bridges. J. Wiley & Sons Inc., N. York.
- Scott, B.D., Park, R., and Priestley, M.J.N. (1982), “Stress-strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates”, *J. American Concrete Institute*, Vol. 79, pp. 13-27.
- Fib Model Code (2010), Chapter 6: Interface Characteristics, Ernst & Sohn Publications, Berlin, Germany, pp.434.
- Saatcioglu M., and Ozcebe G. (1989), “Response of Reinforced Concrete Columns to Simulated Seismic Loading”, *ACI Structural Journal*, Vol. 86, No. 1, pp. 3-12.